b) Pour montrer que CAB est équilatéral; il suffit de montrer que $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi)$ car CAB est isocèle.

$$(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) \equiv \arg\left(\frac{z_2-\omega}{z_1-\omega}\right)(2\pi) \equiv \arg(z_2-\omega) - \arg(z_1-\omega)\,(2\pi)$$

Or $\quad z_2-\omega = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-(1+i\sqrt{3}) = -\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow z_2-\omega = -\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3}\left[1,\frac{\pi}{6}\right] = \left[\sqrt{3},\frac{\pi}{6}+\pi\right]$$

$$\Rightarrow z_2-\omega = \left[\sqrt{3},\frac{7\pi}{6}\right] \Rightarrow \arg(z_2-\omega) \equiv \frac{7\pi}{6}(2\pi)$$

$$\Rightarrow z_1-\omega = -i\sqrt{3} \Rightarrow \arg(z_1-\omega) \equiv \frac{-\pi}{2}(2\pi)$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) \equiv \frac{7\pi}{6}+\frac{\pi}{2}(2\pi) \equiv \frac{5\pi}{3}(2\pi) \Rightarrow$$

$$(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) \equiv -\frac{\pi}{3}(2\pi)$$

Conclusion : $\begin{cases} CA = CB \\ (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) \equiv -\frac{\pi}{3}(2\pi) \end{cases} \Rightarrow ABC$ est un triangle équilatéral.

Solution 19 :

1°/ $\Delta = a^2(1+i)^2 - 4ia^2 = 2ia^2 - 4ia^2 = -2ia^2 = (1-i)^2a^2$. une racine carrée de Δ est $\delta = (1-i)a$.

$$z_1 = \frac{a(1+i)-(1-i)a}{2} = ia$$

$$z_2 = \frac{a(1+i)+(1-i)a}{2} = a$$

$$S_C = \{ia, a\}$$

2°/ On a : $a = \rho e^{i\theta}$

a) $z_1 = ia = e^{i\frac{\pi}{2}}\rho e^{i\theta} = \rho e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}$

$z_2 = \rho e^{i\theta}$

b) $z_1^{2n} + z_2^{2n} = (ia)^{2n} + a^{2n} = a^{2n}(1+(i)^{2n}) = a^{2n}(1+(-1)^n)$